

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ



**Уральский
федеральный
университет**

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ

Тезисы Международной (50-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции
3 — 9 февраля 2019 г.

Екатеринбург
2019

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЙ: тезисы Международной (50-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б.Н. Ельцина, 2019.

Настоящее издание включает тезисы Международной (50-й Всероссийской) молодёжной школы-конференции, прошедшей с 3 по 9 февраля 2019 года в окрестностях г. Екатеринбурга.

Представлены работы по следующим направлениям: алгебра и дискретная математика, математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры, топология и геометрия, компьютерные науки и параллельные вычисления, обработка изображений и навигация по геофизическим полям, приближение функций, математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных, математическая биология, теория вероятностей и случайные процессы, нелинейные уравнения в частных производных. Сборник представляет интерес для специалистов по указанным областям науки.

Конференция проведена при финансовой поддержке УрФУ.

Ответственный редактор
чл.-корр. РАН А.А. Махнёв.

Ответственные за выпуск:
С.Ф. Правдин,
П.А. Чистяков.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЛЯПУНОВА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

И. Н. Банщикова

Рассматривается линейная однородная система с дискретным временем

$$(1) \quad x(m+1) = A(m)x(m),$$

где аргумент m пробегает множество \mathbb{Z}_+ целых неотрицательных чисел; неизвестная функция x принимает значения в \mathbb{R}^n ; коэффициент $A(m)$ при каждом m принадлежит пространству $M_n(\mathbb{R})$ вещественных $n \times n$ матриц. Всюду ниже будем предполагать, что функция $A(\cdot)$ *вполне ограничена* [1], то есть при каждом m существует $A^{-1}(m)$, и найдется такое a_0 , что $\sup_m (\|A(m)\| + \|A^{-1}(m)\|) \leq a_0$.

В задачах управления асимптотикой решений линейных систем с дискретным временем важную роль играет понятие полного спектра показателей Ляпунова. Известно (см., например, [2]), что в общем случае показатели Ляпунова системы (1) не обладают свойством устойчивости по отношению к малым возмущениям коэффициентов системы. Это обстоятельство сильно затрудняет возможность управления показателями, а потому и асимптотикой решений системы (1). Поэтому важной задачей является исследование условий, обеспечивающих устойчивость показателей Ляпунова системы (1). Введем необходимые понятия.

Для произвольного нетривиального решения $x(\cdot)$ системы (1) определим его *показатель Ляпунова* равенством $\lambda[x] \doteq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \ln \|x(m)\|$ и обозначим через Λ *спектр показателей Ляпунова* системы (1), то есть множество всех чисел $\lambda \in \mathbb{R}$, для каждого из которых существует нетривиальное решение $x(\cdot)$ системы (1) с показателем λ . Известно [3, с. 51–52], что спектр показателей Ляпунова системы (1) состоит не более чем из n различных чисел и расположен на отрезке $[-\ln a_0, \ln a_0]$. Пусть $\Lambda = \{\Lambda_1(A), \dots, \Lambda_q(A)\}$, где $\Lambda_1 < \dots < \Lambda_q$, $q \leq n$. Показатель Ляпунова тривиального решения полагаем равным $-\infty$.

Для каждого $j \in \{1, \dots, q\}$ рассмотрим множество \mathcal{E}_j всех решений системы (1), показатели которых не превосходят Λ_j . Множество \mathcal{E}_0 считаем состоящим из тривиального решения системы (1). Тогда [3, с. 54] каждое из множеств \mathcal{E}_j является линейным подпространством, имеют место строгие вложения $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_q$ и неравенства $0 = \dim \mathcal{E}_0 < \dim \mathcal{E}_1 < \dots < \dim \mathcal{E}_q = n$. Положим $n_j = \dim \mathcal{E}_j - \dim \mathcal{E}_{j-1}$ и назовем n_j *кратностью* показателя Λ_j , $j = 1, \dots, q$. Заметим, что $n_1 + n_2 + \dots + n_q = n$. Набор n чисел $\Lambda_1(A), \dots, \Lambda_1(A), \dots, \Lambda_2(A), \dots, \Lambda_q(A)$, где каждое Λ_j повторяется n_j раз, называется *полным спектром показателей Ляпунова* системы (1). Будем обозначать его $\lambda_1(A) \leq \dots \leq \lambda_n(A)$.

Определение 1 [4]. Показатели Ляпунова линейной системы (1) называются *устойчивыми*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всякой мультипликативно возмущенной системы вида $y(m+1) = A(m)R(m)y(m)$ с возмущением $R: \mathbb{Z}_+ \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, удовлетворяющим условию $\sup_m \|R(m) - E\| < \delta$, выполнены неравенства $|\lambda_i(A) - \lambda_i(AR)| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$.

Определение 2. Пусть $D: \mathbb{Z}_+ \rightarrow M_k(\mathbb{R})$ — произвольная вполне ограниченная функция. *Верхним центральным показателем (Винограда)* и *младшим центральным показателем (Миллионщикова)* функции $D(\cdot)$ будем

называть соответственно величины

$$\Omega(D) = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^m \ln \left\| \prod_{l=(j-1)T}^{jT-1} D(l) \right\|,$$

$$\bar{\omega}(D) = \lim_{T \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{mT} \sum_{j=1}^m \ln \left\| \left(\prod_{l=(j-1)T}^{jT-1} D(l) \right)^{-1} \right\|^{-1}.$$

Определение 3. Преобразованием Ляпунова системы (1) называется линейное преобразование вида

$$(2) \quad z(m) = L(m)x(m),$$

где матрица $L : \mathbb{Z}_+ \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ вполне ограничена.

Теорема. Показатели Ляпунова системы (1) устойчивы тогда и только тогда, когда существует преобразование Ляпунова (2), приводящее систему (1) к системе $z(m+1) = D(m)z(m)$ с блочно-диагональной матрицей коэффициентов $D(m) = \text{diag}(D_1(m), \dots, D_q(m))$, обладающей следующими свойствами:

- 1) для каждого $j \in \{1, \dots, q\}$ матрица $D_j(m) \in M_{n_j}(\mathbb{R})$ нижняя треугольная;
- 2) имеют место равенства $\Omega(D_j) = \bar{\omega}(D_j) = \Lambda_j$, $j = 1, \dots, q$;
- 3) блоки $D_1(\cdot), \dots, D_q(\cdot)$ интегрально отделены, то есть существуют такие $\alpha > 1$ и $\gamma > 0$, что при всех $m > s$ и $j \in \{1, \dots, q-1\}$ справедливы неравенства

$$\left\| \left(\prod_{l=s}^{m-1} D_{j+1}(l) \right)^{-1} \right\|^{-1} \geq \gamma \alpha^{m-s} \left\| \prod_{l=s}^{m-1} D_j(l) \right\|.$$

Аналогичное утверждение для систем с непрерывным временем было получено В. М. Миллионщиковым [5] и Б. Ф. Быловым, Н. А. Изобовым [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-51-41005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. Б. Демидович, *Об одном признаке устойчивости разностных уравнений*, Дифференциальные уравнения. **5**:7 (1969), 1247–1255.
- [2] И. Н. Банщикова, *Пример линейной дискретной системы с неустойчивыми показателями Ляпунова*, Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. **26**:2 (2016), 169–176.
- [3] И. В. Гайшун, *Системы с дискретным временем*. Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001. 400 с.
- [4] И. Н. Банщикова, С. Н. Попова, *О спектральном множестве линейной дискретной системы с устойчивыми показателями*, Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. **26**:1 (2016), 15–26.
- [5] В. М. Миллионщиков, *Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений*, Дифференциальные уравнения. **5**:10 (1969), 1775–1784.
- [6] Б. Ф. Былов, Н. А. Изобов, *Необходимые и достаточные условия устойчивости характеристических показателей линейной системы*, Дифференциальные уравнения. **5**:10 (1969), 1794–1803.

УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, ИЖЕВСК (Россия)
E-mail address: banshhikova.irina@mail.ru

Содержание

Алгебра и дискретная математика

(председатель к.ф.-м.н. Н.В. Маслова)

1 I.B. Gorshkov. On a connection between the order of a finite group and the set of conjugacy classes size.....	4
2 V.V. Kabanov. Eigenvalues and eigenfunctions of Cayley graphs.....	6
3 Lu Li. Classical generators for category of coherent sheaves and the regular locus.....	7
4 Lu Li. Structural theorem for gr-injective modules over gr-noetherian G-graded commutative rings and the gr-Bass numbers.....	8
5 H. Shabana. Careful synchronization of nondeterministic automata.....	10
6 Е.А. Беспалов. О совершенных раскрасках графов Дуба с параметрами $(m, 5m, 3m, 3m)$	12
7 А.А. Валюженич, С.В. Горяинов, В.В. Кабанов, Е.В. Константинова, Л.В. Шалагинов. О минимальных носителях собственных функций некоторых графов Кэли на симметрической группе.....	14
8 А.С. Васильев. О нормализаторах силовских подгрупп в классических группах.....	15
9 М.В. Волков, Н.В. Китов. Тождества в моноиде Кауфмана K_4	16
10 К.Ю. Коротицкий, Д.О. Ревин. Максимальные разрешимые подгруппы нечетного индекса в симметрических группах.....	17
11 Д.В. Литичевский. Списочное декодирование вейвлет-кодов.....	18
12 В.В. Сидоров. Автоморфизмы полукольца многочленов $\mathbb{R}_+^V[x]$ и решетки его подалгебр (с единицей).....	20
13 А.П. Храмова, А.А. Бутурлакин. О существовании разрешимых холловых подгрупп.....	21
14 Л.Ю. Циовкина. О простом спектре группы автоморфизмов $AT_4(p, p+2, r)$ -графа.....	22
15 А.А. Шлепкин. Периодические группы, насыщенные конечными простыми группами лиева типа ранга 1 и группами $L_3(2^n)$	24

Математическая теория оптимального управления и дифференциальные игры

(председатели к.ф.-м.н. Д.В. Хлопин
и к.ф.-м.н. М.И. Гомоюнов)

1 N. Pogodaev, M. Staritsyn. On optimal impulsive control of continuity equations.....	25
2 M. Staritsyn. Control and relaxation of dynamic complementarity systems with measures.....	26
3 А.Л. Багно. Численные методы построения функции цены задачи оптимального управления на бесконечном горизонте.....	27
4 И.Н. Банщикова. Об устойчивости показателей Ляпунова линейной системы с дискретным временем.....	28
5 Т.Д. Барбашов, А.Д. Романенко. Численный анализ решения уравнения параболического типа с дробной производной по времени.....	30
6 А.В. Егорова. Об одной задаче оптимальной добычи возобновляемого ресурса.....	32
7 А.А. Ершов, В.Н. Ушаков. Оценка хаусдорфова расстояния между альфа-множеством и его выпуклой оболочкой.....	34
8 И.В. Зыков. Внешние оценки множеств достижимости управляемых систем с интегральными ограничениями.....	36
9 В.О. Карандина. Обоснование устойчивости алгоритмов управления с поводырем в задаче оптимизации гарантии с функциональными ограничениями на помеху.....	37
10 И.Г. Ким. Стабилизация двухмассовой системы статической обратной связью по выходу.....	38

11 К.О. Левинская. Анализ сеточных аппроксимаций параболического уравнения с дробной производной по времени.....	40
12 Н.Г. Новоселова. О построении области разрешимости в задаче химиотерапии злокачественной опухоли.....	41
13 А.В. Паршиков. Исследование алгоритмов управления высотой полета в режиме огибания рельефа.....	43
14 А.С. Родин. О построении сингулярного дифференцируемого подмногообразия размерности 1 для минимаксного решения уравнения Гамильтона—Якоби—Беллмана....	45
15 А.Д. Романенко. Численное решение параболической задачи оптимального управления с производной дробного порядка по времени.....	47
16 А.А. Усова. Стабилизация взаимодействия диссипативных систем с квадратичной функцией расхода.....	49
17 Р.И. Шевченко, Ю.Ф. Долгий. Построение канонического разложения для линейной периодической системы с последствием.....	51
18 К.А. Щелчков. О нелинейной задаче уклонения с дискретным управлением.....	53
19 П.А. Юровских. О вычислении информационных множеств многошаговых систем.....	54

Топология и геометрия **(председатель д.ф.-м.н. А.В. Осипов)**

1 M.A. Filatova, A.V. Osipov, D.A. Vinokurskij. On one-sided sequential separability of functional spaces.....	56
2 K.S. Gotin. Markov theorem for doodles on two-sphere.....	57
3 A.V. Osipov. Selectors for sequences of subsets of hyperspaces.....	58
4 A.V. Osipov, D.Y. Lyakhovets. Selection principles and games in bitopological function spaces.....	59
5 П.Д. Лебедев, А.Л. Казаков. Итерационные алгоритмы построения оптимальных покрытий плоских фигур наборами кругов различного радиуса.....	60
6 П.Д. Лебедев, А.А. Успенский. Построение решения задачи быстрогодействия с круговыми вектограммами скоростей с помощью рассеивающих кривых в неоднородной среде.....	62
7 А.Е. Липин. Конечная и ω -разложимость в точке.....	64
8 Д.В. Пермикин, В.С. Пермикин. Геометрия Лобачевского—Больяи. Преобразование системы координат. Следствия.....	66
9 В.Р. Смолин. Пример π -пространства без Лузинской π -базы.....	68

Компьютерные науки и параллельные вычисления **(председатели д.ф.-м.н. Е.Е. Иванко и М.А. Черноскутов)**

1 А.С. Берсенев, П.А. Васёв, А.С. Игумнов, Д.В. Манаков, А.А. Попель, С.В. Шарф. Визуализация NFS-активности суперкомпьютера.....	69
2 А.Б. Веретенников. Классификация алгоритмов полнотекстового поиска с учетом расстояния, использующих индексы многокомпонентных ключей.....	72

Обработка изображений и навигация по геофизическим полям (председатели к.ф.-м.н. В.Б. Костоусов и к.ф.-м.н. Ф.А. Корнилов)

1	Н.В. Дмитриев. Алгоритм поиска и распознавания чисел на топографических картах.....	74
2	А.В. Дунаева. Применение сверточных нейронных сетей для обнаружения строений на спутниковых снимках земной поверхности.....	76
3	К.В. Дунаевская, В.Б. Костоусов. Новый метод оценки ошибок коррекции по полю микрорельефа.....	78
4	Ф.А. Корнилов. Поиск структурных различий изображений как решение задачи глобальной оптимизации.....	80
5	Е.А. Крупенников. Регуляризованный метод отрицательной невязки для решения задач реконструкции управлений.....	81

Теория функций (председатель к.ф.-м.н. Р.Р. Акопян)

1	E.V. Berestova. Plancherel—Pólya inequality for entire functions of exponential type in $L^2(\mathbf{R}^n)$	83
2	T.M. Nikiforova. Polynomials least deviating from zero on an ellipse.....	85
3	А.Р. Алимов. Солнечные свойства локально чебышёвских множеств.....	86
4	Ю.С. Горячева. Неравенство Турана для интегральной нормы по границе компактной области.....	87
5	М.Л. Гриднев. Поведение рядов Фурье функций с ограничением на фрактальность их графиков.....	88
6	А.О. Леонтьева. Неравенство Бернштейна—Сеге для производной нулевого порядка тригонометрических полиномов в пространстве L_0	89
7	Т.М. Никифорова. Многочлены, наименее уклоняющиеся от нуля на эллипсе.....	91
8	Н.С. Паюченко. Слабое неравенство Маркова на отрезке.....	92
9	А.А. Селезнев. Наилучшее L^2 -продолжение алгебраических многочленов с единичной окружности на окружность большего радиуса.....	93
10	А.Ю. Торгашова. Одностороннее приближение в L с весом характеристической функции симметричного интервала алгебраическими многочленами.....	95
11	Д.А. Ямковой. Гармонические интерполяционные всплески в краевой задаче Неймана....	96

Математическое программирование, некорректные задачи и анализ данных (председатель д.ф.-м.н. М.Ю. Хачай)

1	А.А. Ершова. О решении обратной граничной задачи для композитных материалов.....	97
2	Д.А. Жураев. Задача Коши для матричных факторизаций уравнения Гельмгольца в пространстве \mathbf{R}^m	98
3	С.С. Кетков. Об одном алгоритме для задачи дробной оптимизации.....	100
4	Ю.А. Мезенцев, Ю.Л. Короткова. Задача оптимального оперативного управления графиком движения воздушных судов при условии минимизации задержек.....	102
5	М.А. Сабанов. Алгоритм приведения графа сети железных дорог к нормализованному виду.....	104
6	А.А. Спиридонов, С.С. Кумков. Формирование бесконфликтного слияния потоков судов при заданном расписании их прибытия.....	105

Математическая биология

(председатель к.ф.-м.н. С.Ф. Правдин)

- 1 A.F. Abu-Bakr, A. Yu. Zubarev. Mathematical modeling of hyperthermia in a system of interparticle interaction magnetic nanoparticles for easy magnetization axes.....107
- 2 A.D. Dokuchaev, V.D. Sholohov, A.G. Kursanov. Finite element model of myocardial tissue. .109
- 3 G.L. Zavorokhin. Mathematical modeling of the blood circulatory system.....110
- 4 А.Д. Докучаев, В.Д. Шолохов, А.Г. Курсанов. Конечно-элементная модель миокардиальной ткани.....112
- 5 Т.И. Епанчинцев, С.Ф. Правдин, А.В. Панфилов. Адаптивный алгоритм вытеснения спиральной волны высокочастотной стимуляцией в модели миокарда сердца человека...113
- 6 Д.В. Мангилева, А.Д. Докучаев, С.Ю. Хамзин, Т.В. Чумарная. Оценка влияния геометрии левого желудочка сердца человека и глубины постинфарктного рубца на динамику спиральных волн.....114

Теория вероятностей и случайные процессы

(председатель к.ф.-м.н. Ю.В. Авербух)

- 1 A.P. Kolinichenko, L.B. Ryashko. Pattern sensitivity analysis in distributed models with diffusion.....116
- 2 Е.П. Абрамова, Т.В. Рязанова. Анализ влияния воздействия окружающей среды на модель сосуществования двух популяций.....117
- 3 И.А. Башкирцева, С.С. Зайцева. Анализ мультимодальных стохастических осцилляций в модели биохимической реакции.....118
- 4 А.В. Беляев, Т.В. Рязанова. Стохастическая кусочно-гладкая модель популяционной динамики.....119
- 5 А.А. Березин. Марковская модель динамической системы на сети.....120
- 6 С.С. Зайцева, Л.Б. Рязко, Е.С. Слепухина. Стохастическая деформация тороидального берстинга в модели нейрона.....121
- 7 А.П. Колиниченко, Л.Б. Рязко. Анализ чувствительности паттернов в распределенных моделях с диффузией.....122
- 8 Н.А. Швемлер, В.Е. Мосягин. Стохастическая модель обучения рекуррентных нейронных сетей.....123
- 9 А.О. Шерстобитова. Длительность последовательной процедуры оценивания параметров авторегрессионной модели.....124

Нелинейные уравнения в частных производных:

качественная теория и численные методы

(председатель д.ф.-м.н. А.А. Ковалевский)

- 1 M. Ibrahim. Direct numerical discretization for fractional differential equations with functional delay.....125
- 2 M. Khadour. Indirect numerical method for functional delay differential equations with time fractional derivative.....128
- 3 P.V. Markov. Classes of difference schemes for the non-linear Rapoport–Leas equation of two-phase filtration with the possibility of numerical solutions generation using continuous symmetry groups.....130
- 4 Е.С. Барановский, А.А. Домнич. Об одной модели протекания неравномерно нагретой вязкой жидкости через ограниченную область.....132
- 5 Г.Л. Заворохин, А.А. Мацковский. Головная волна интерференционного типа в задаче дифракции волн точечного источника на границе с положительной эффективной кривизной.....134

6	Г.Л. Заворохин, А.А. Мацковский. Численное исследование аналитической структуры решений дисперсионного уравнения в задаче дифракции волн точечного источника на границе с положительной эффективной кривизной.....	136
7	П.В. Марков. Классы разностных схем нелинейного уравнения двухфазной фильтрации Рапопорта–Лиса с возможностью генерации численных решений с помощью непрерывных групп симметрии.....	138
8	Д.Т. Сираева. Классификация инвариантных подмоделей ранга 2 идеальной гидродинамики.....	140
9	С.В. Хабиров, Т.Ф. Мукминов. Пример цепочки вложенных подмоделей для 5-мерной подалгебры из операторов переноса по времени, переноса, галилеева переноса, вращения вокруг оси и растяжения.....	142